FIZYKA LABO_2

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe - wprowadzenie

Równania różniczkowe są popularnie spotykane we wszystkich dziedzinach nauk ścisłych i przyrodniczych a szczególnie w:

- Fizyce (np. **równania Maxwell'a**)
- Mechanice (np. **równania ruchu harmonicznego**)
- Elektronice (np. **stany nieustalone w obwodach elektrycznych**)
- Automatyce (np. **warunki sterowalności układu**)
- **i wielu innych dziedzinach nauki i techniki**

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Eulera

Metoda Eulera pozwala na numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(0) = y_0$$

Przykłady:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x}, \quad y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.3e^{-x} - 2y, \quad y(0) = 5$$

$$f(x,y) = 1.3e^{-x} - 2y$$

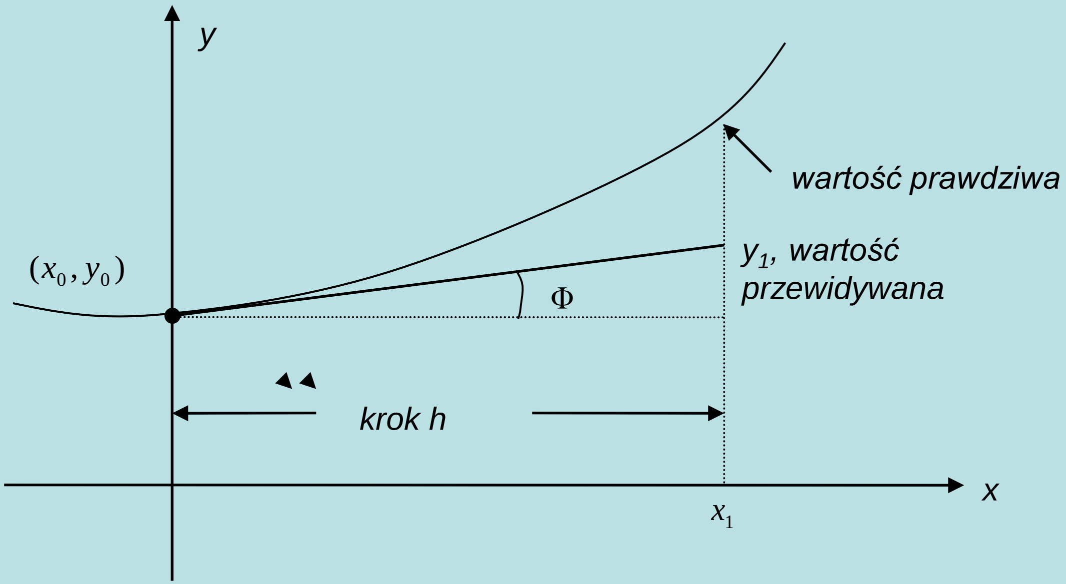
$$e^{y}\frac{dy}{dx} + x^2y^2 = 2\sin(3x), \quad y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin(3x) - x^2y^2}{e^{y}}, \quad y(0) = 5$$

$$f(x,y) = \frac{2\sin(3x) - x^2y^2}{e^{y}}$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Eulera

Dla x = 0 wartość y = y_0 przyjmując że x = x_0 = 0



Znając f(x, y) i mając dane wartości x_0 i y_0 z warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ można obliczyć nachylenie funkcji f(x, y) do osi X w punkcie (x_0, y_0)

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Eulera

$$\tan\Phi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)\left(x_1 - x_0\right)$$

Oznaczając x_1-x_0 jako krok h otrzymujemy:

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)h$$

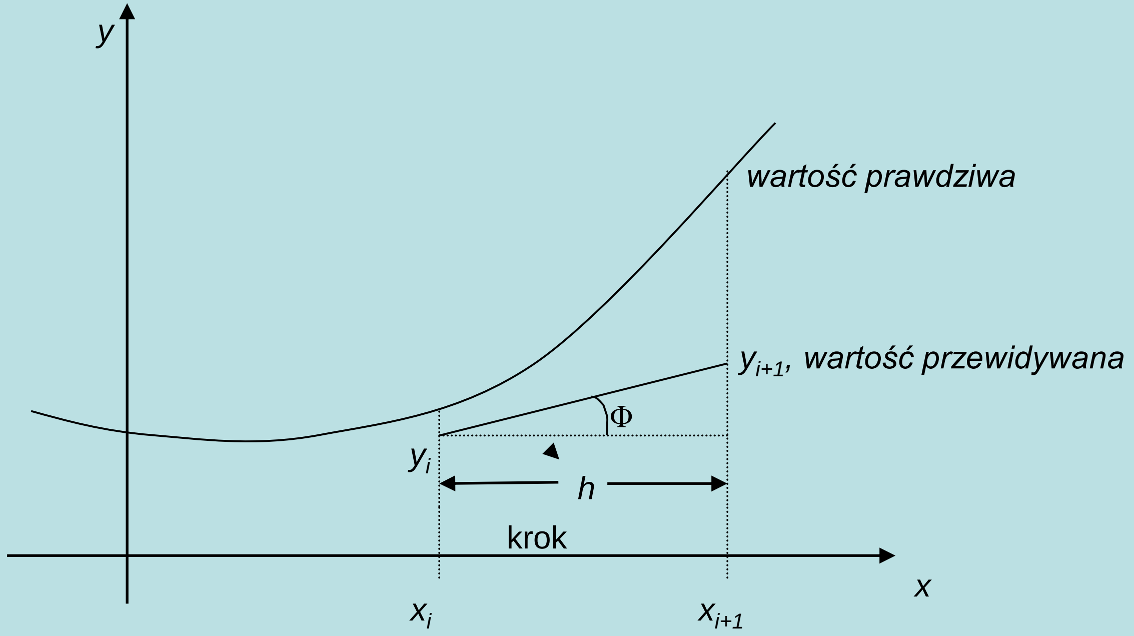
Wykorzystując obliczaną wartość y_1 można obliczyć wartość y_2 dla x_2 jako:

$$y_2 = y_1 + f\left(x_1, y_1\right)h \qquad x_2 = x_1 + h$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Eulera

Można zatem wyprowadzić wzór rekurencyjny:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)h$$



Metoda Eulera - Przykład

Kula nagrzana do temperatury 1200 K schładza się do temperatury 300K. Zakładając że w procesie schładzania ciepło jest oddawane do otoczenia jedynie przez radiację to temperatura kuli opisana jest równaniem:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right), \qquad \theta(0) = 1200\text{K}$$

Jaka jest temperatura kuli po 480 sekundach jej schładzania?

$$f(t,\theta) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right)$$

Metoda Eulera – Przykład c.d.

Wzór rekurencyjny metody Eulera: $\theta_{i+1} = \theta_i + f\left(t_i, \theta_i\right)h$

Zakładamy krok h = 240

Dla i = 0, t_0 = 0, Θ_0 = 1200:

$$\theta_1 = \theta_0 + f\left(t_0, \theta_0\right)h = 1200 + f\left(0{,}1200\right)\times 240$$
$$= 1200 + \left(-2.2067\times 10^{-12}\left(1200^4 - 81\times 10^8\right)\right)\times 240$$
$$= 1200 + \left(-4.5579\right)\times 240 = 106.09K$$

$$t = t_1 = t_0 + h = 0 + 240 = 240$$

Metoda Eulera – Przykład c.d.

Dla i = 1, t_1 = 240, Θ_0 = 106.09:

$$\theta_2 = \theta_1 + f\left(t_1, \theta_1\right)h = 106.09 + f\left(240, 106.09\right) \times 240$$
$$= 106.09 + \left(-2.2067 \times 10^{-12}\left(106.09^4 - 81 \times 10^8\right)\right) \times 240$$
$$= 106.09 + \left(0.017595\right) \times 240 = 110.32K$$

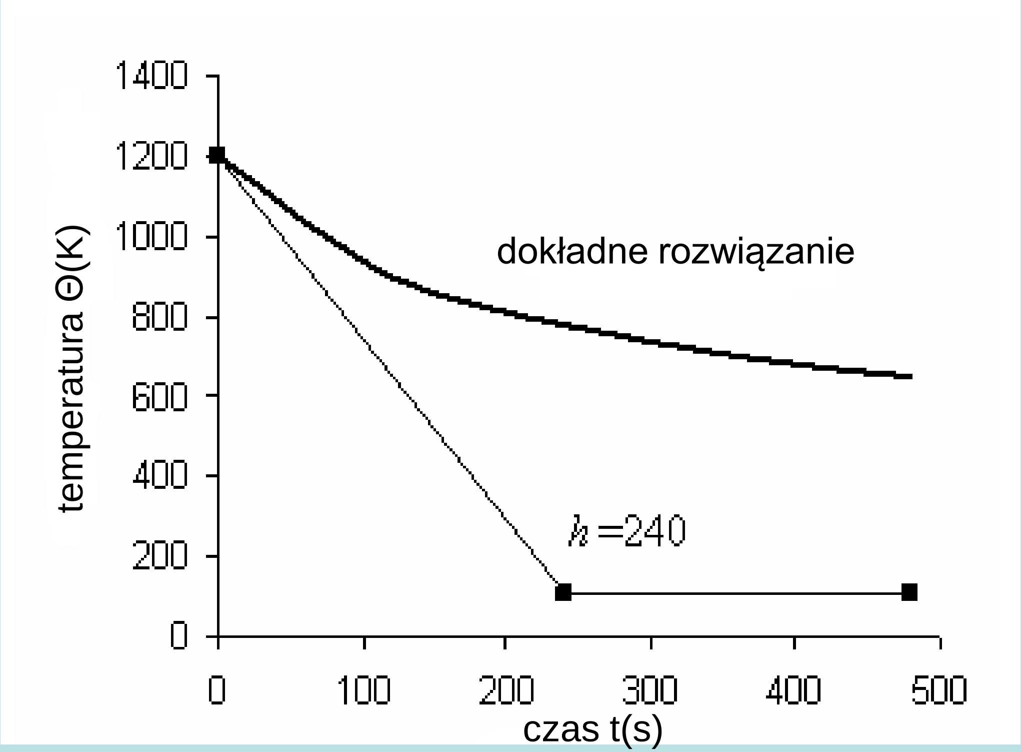
$$t = t_2 = t_1 + h = 240 + 240 + 480$$

Po wykonaniu dwóch iteracji metody Eulera otrzymujemy że temperatura kuli po 480 s wyniesie 110.32K

Czy to prawda?

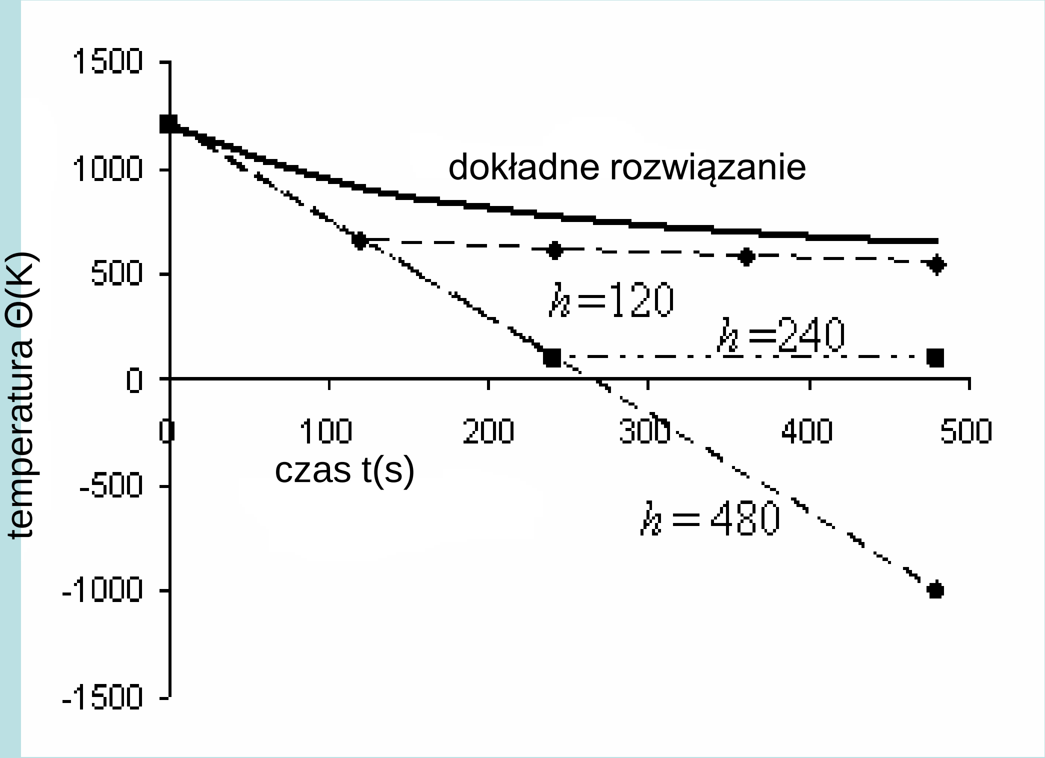
Metoda Eulera – Przykład c.d.

Porównanie rozwiązania dokładnego z rozwiązaniem otrzymanym przy użyciu metody Eulera.



Metoda Eulera – Przykład c.d.

Dobór odpowiedniego kroku h jest kluczowy dla odpowiedniej dokładności rozwiązania stosując metodę Eulera



rozmiar kroku h	$\theta(480)$	$\lvert\in_t\rvert\,\%$
480	-987.81	252.54
240	110.32	82.964
120	546.77	15.566
60	614.97	5.0352
30	632.77	2.2864

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Rungego - Kutty

Metoda Rungego-Kutty pozwala na numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

Korzystając z rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 y}{dx^3}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

$$= y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

Widać że metoda Eulera jest metodą Rngego-Kutty pierwszego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Rungego - Kutty

Wzór dla metody Rungego-Kutty drugiego rzędu będzie wyglądał następująco:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2$$

dla metody czwartego rzędu:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i, y_i)h^3 + \frac{1}{4!} f'''(x_i, y_i)h^4$$

Jak wyznaczyć pochodne f’ metody stopnia drugiego i f’, f’’, f’’’ dla metody stopnia czwartego?

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Rungego - Kutty

Dla metody Rungego-Kutty drugiego rzędu wzór:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2$$

można zapisać jako:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

gdzie: $k_1 = f(x_i, y_i)$ $\quad k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$

aby wyznaczyć współczynniki a_1, a_2, p_1, q_{11} należy rozwiązać kład równań:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

zazwyczaj wartość a_2 wybiera się aby rozwiązać pozostałe

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Rungego - Kutty

Zazwyczaj a_2 przyjmuje jedną z trzech wartości: ½, 1, 2/3

Metoda Heun'a	Metoda midpoint	Metoda Raltson'a
$a_2 = \frac{1}{2}$	$a_2 = 1$	$a_2 = \frac{2}{3}$
$a_1 = \frac{1}{2} \quad p_1 = 1 \quad q_{11} = 1$	$a_1 = 0 \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad q_{11} = \frac{1}{2}$	$a_1 = \frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{3}{4} \quad q_{11} = \frac{3}{4}$
$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + h, y_i + k_1 h\right)$	$y_{i+1} = y_i + k_2 h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$	$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$

Metoda Rungego - Kutty - Przykład

Kula nagrzana do temperatury 1200 K i schładza się do temperatury 300K. Zakładając że w procesie schładzania ciepło jest oddawane do otoczenia jedynie przez radiację to temperatura kuli opisana jest równaniem:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right), \qquad \theta(0) = 1200\mathrm{K}$$

Jaka jest temperatura kuli po 480 sekundach jej schładzania?

$$f(t,\theta) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right)$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Dla metody Heun'a:
$$\theta_{i+1} = \theta_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$
$$k_1 = f\left(t_i, \theta_i\right)$$
$$k_2 = f\left(t_i + h, \theta_i + k_1 h\right)$$

Dla i = 0, t_0 = 0, Θ_0 = Θ(0) = 1200:

$$k_1 = f\left(t_0, \theta_o\right) = f\left(0{,}1200\right) = -2.2067\times 10^{-12}\left(1200^4 - 81\times 10^8\right) = -4.5579$$
$$k_2 = f\left(t_0 + h, \theta_0 + k_1 h\right) = f\left(0 + 240{,}1200 + \left(-4.5579\right)240\right) = f\left(240{,}106.09\right)$$
$$= -2.2067\times 10^{-12}\left(106.09^4 - 81\times 10^8\right) = 0.017595$$
$$\theta_1 = \theta_0 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h = 1200 + \left(\frac{1}{2}\left(-4.5579\right) + \frac{1}{2}\left(0.017595\right)\right)240$$
$$= 1200 + \left(-2.2702\right)240 = 655.16K$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Dla i = 1, $t_1 = t_0 + h = 240$, $\Theta_1 = 655{,}16$:

$$k_1 = f(t_1,\theta_1) = f(240{,}655.16) = -2.2067\times10^{-12}\left(655.16^4 - 81\times10^8\right) = -0.38869$$

$$k_2 = f(t_1 + h, \theta_1 + k_1 h) = f\left(240 + 240{,}655.16 + (-0.38869)240\right) = f(480{,}561.87)$$
$$= -2.2067\times10^{-12}\left(561.87^4 - 81\times10^8\right) = -0.20206$$

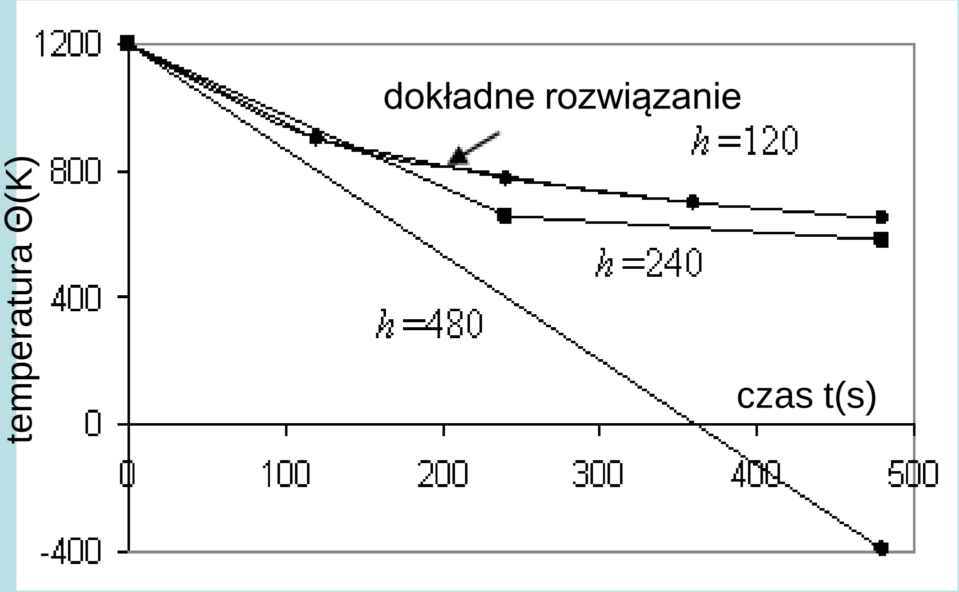
$$\theta_2 = \theta_1 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h = 655.16 + \left(\frac{1}{2}(-0.38869) + \frac{1}{2}(-0.20206)\right)240$$
$$= 655.16 + (-0.29538)240 = 584.27$$

Po wykonaniu dwóch iteracji metody Heun'a otrzymujemy że temperatura kuli po 480 s wyniesie 584.27K

$\theta_2 = \theta(480) = 584.27$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

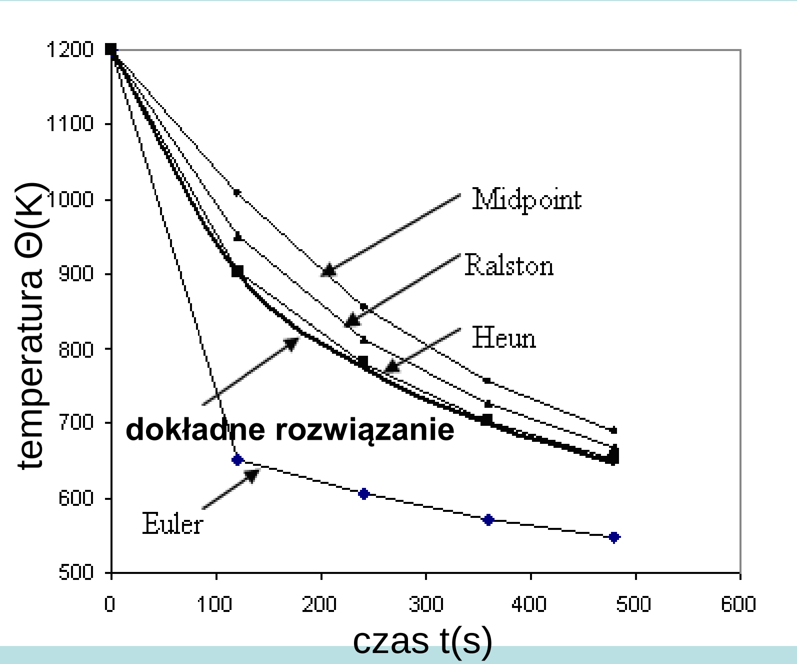
Dobór odpowiedniego kroku h jest kluczowy dla odpowiedniej dokładności rozwiązania stosując metodę Heun'a



rozmiar kroku h	$\theta(480)$	$\lvert\in_t\rvert$ %
480	-393.87	160.82
240	584.27	9.78
120	651.35	0.58
60	649.91	0.36
30	648.21	0.10

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Porównanie dotychczas przedstawionych metod:



Dokładna wartość rozwiązania obliczona analitycznie wynosi:

$$\theta(480) = 647.57K$$

Rozmiar kroku h	Θ(480)			
	Euler	**Heun**	**Midpoint**	**Ralston**
480	-987.84	-393.87	1208.4	449.78
240	110.32	584.27	?	?
120	546.77	651.35	690.20	667.71
60	614.97	649.91	654.85	652.25
30	632.77	648.21	649.02	648.61

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – metoda Rungego - Kutty

Dla metody Rungego-Kutty czwartego rzędu wzór:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f^{'}(x_i, y_i)h^2 + \frac{1}{3!} f^{''}(x_i, y_i)h^3 + \frac{1}{4!} f^{'''}(x_i, y_i)h^4$$

można zapisać jako:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

gdzie najczęściej przyjmuje się że:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Metoda Rungego - Kutty - Przykład

Kula nagrzana do temperatury 1200 K i schładza się do temperatury 300K. Zakładając że w procesie schładzania ciepło jest oddawane do otoczenia jedynie przez radiację to temperatura kuli opisana jest równaniem:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times 10^8\right), \qquad \theta(0) = 1200\mathrm{K}$$

Jaka jest temperatura kuli po 480 sekundach jej schładzania?

$$f(t,\theta) = -2.2067\times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times 10^8\right)$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Dla metody Rungego - Kutty czwartego rzędu:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$

Dla i = 0, t_0 = 0, Θ_0 = 1200:

$$k_1 = f\left(t_0, \theta_0\right) = f\left(0{,}1200\right) = -2.2067\times 10^{-12}\left(1200^4 - 81\times 10^8\right) = -4.5579$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, \theta_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}(240), 1200 + \frac{1}{2}(-4.5579)\times 240\right)$$

$$= f\left(120{,}653.05\right) = -2.2067\times 10^{-12}\left(653.05^4 - 81\times 10^8\right) = -0.38347$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, \theta_0 + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}(240), 1200 + \frac{1}{2}(-0.38347) \times 240\right)$$

$$= f(120, 1154.0) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(1154.0^4 - 81 \times 10^8\right) = -3.8954$$

$$k_4 = f(t_0 + h, \theta_0 + k_3 h) = f(0 + 240, 1200 + (-3.894) \times 240)$$

$$= f(240, 265.10) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(265.10^4 - 81 \times 10^8\right) = 0.0069750$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= 1200 + \frac{1}{6}\left(-4.5579 + 2(-0.38347) + 2(-3.8954) + (0.069750)\right)240$$

$$= 1200 + (-2.1848)240 = 675.65$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Dla i = 1, t_1 = 240, Θ_1 = 675,65:

$$k_1 = f(t_1, \theta_1) = f(240, 675.65) = -2.2067\times10^{-12}(675.65^4 - 81\times10^8) = -0.44199$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, \theta_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(240 + \frac{1}{2}(240), 675.65 + \frac{1}{2}(-0.44199)240\right)$$

$$= f(360, 622.61) = -2.2067\times10^{-12}(622.61^4 - 81\times10^8) = -0.31372$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, \theta_1 + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f\left(240 + \frac{1}{2}(240), 675.65 + \frac{1}{2}(-0.31372)\times240\right)$$

$$= f(360, 638) = -2.2067\times10^{-12}(638.00^4 - 81\times10^8) = -0.34775$$

$$k_4 = f(t_1 + h, \theta_1 + k_3 h) = f(240 + 240, 675.65 + (-0.34775)\times240)$$

$$= f(480, 592.19) = 2.2067\times10^{-12}(592.19^4 - 81\times10^8) = -0.25351$$

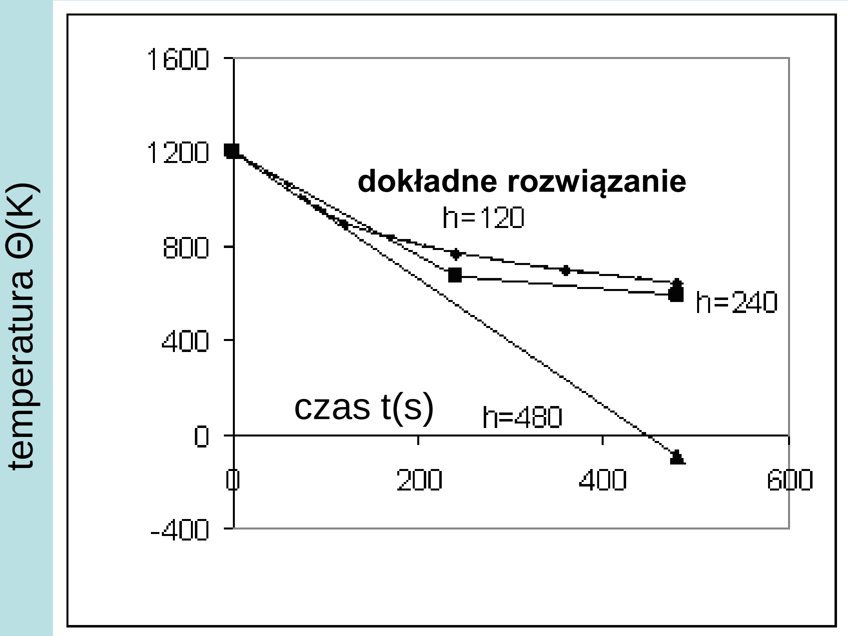
$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= 675.65 + \frac{1}{6}(-0.44199 + 2(-0.31372) + 2(-0.34775) + (-0.25351))\times240$$

$$= 675.65 + \frac{1}{6}(-2.0184)\times240 = 594.91\text{K}$$

Metoda Rungego - Kutty – Przykład c.d.

Dobór odpowiedniego kroku h jest kluczowy dla odpowiedniej dokładności rozwiązania stosując metodę Rungego - Kutty czwartego rzędu.



rozmiar kroku h	$\theta(480)$	$\lvert\in_t\rvert\,\%$
480	-90.278	113.94
240	594.91	8.1319
120	646.16	0.21807
60	647.54	0.0051926
30	647.57	0.00013419

Metoda Rungego – Kutty dla równań różniczkowych wyższych rzędów

Dla równania różniczkowego zwyczajnego wyższego rzędu albo dla równania cząstkowego

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_o y = f(x)$$

można dokonać podstawienia:

$$y = z_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz_1}{dx} = z_2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz_2}{dx} = z_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dz_n}{dx} = \frac{1}{a_n}\left(-a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots - a_1 \frac{dy}{dx} - a_0 y + f(x)\right) = \frac{1}{a_n}\left(-a_{n-1} z_n \ldots - a_1 z_2 - a_0 z_1 + f(x)\right)$$

Metoda Rungego – Kutty dla równań różniczkowych wyższych rzędów

Otrzymane równania tworzą w efekcie układ n równań:

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2 = f_1(z_1, z_2, \ldots, x)$$

$$\frac{dz_2}{dx} = z_3 = f_2(z_1, z_2, \ldots, x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_n}{dx} = \frac{1}{a_n}\left(-a_{n-1}z_n \ldots - a_1 z_2 - a_0 z_1 + f(x)\right)$$

Każde z n równań może być rozwiązane z użyciem opisanych wcześniej metod rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych stopnia pierwszego

Przykład

Rozwiąż równanie: $$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=e^{-t},\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=2$$

oraz oblicz y(0.75)

Podstawiając: $$\frac{dy}{dt}=z$$

Po podstawieniu równanie przybiera postać:

$$\frac{dz}{dt}+2z+y=e^{-t}$$

$$\frac{dz}{dt}=e^{-t}-2z-y$$

Przykład c.d.

W efekcie należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\frac{dy}{dt} = z = f_1(t,y,z), \; y(0) = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t} - 2z - y = f_2(t, y, z), \; z(0) = 2$$

Stosując metodę Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$$

$$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$$

Przykład c.d.

Krok 1: $i=0, t_0=0,\ y_0=1,\ z_0=2$

$y_{i+1}=y_i+f_1(t_i,y_i,z_i)h$	$z_{i+1}=z_i+f_2(t_i,y_i,z_i)h$
$y_1=y_0+f_1(t_0,y_0,z_0)h$ $=1+f_1(0,1,2)(0.25)$ $=1+2(0.25)$ $=1.5$ $y_1=y(0.25)\approx 1.5$	$z_1=z_0+f_2(t_0,y_0,z_0)h$ $=2+f_2(0,1,2)(0.25)$ $=2+\left(e^{-0}-2(2)-1\right)(0.25)$ $=1$ $z_1=z(0.25)=\frac{dy}{dt}(0.25)\approx 1$

$$t=t_1=t_0+h=0+0.25=0.25$$

Przykład c.d.

Krok 2: $i=1,\ t_1=0.25,\ y_1=1.5,\ z_1=1$

$y_{i+1}=y_i+f_1(t_i,y_i,z_i)h$	$z_{i+1}=z_i+f_2(t_i,y_i,z_i)h$
$y_2=y_1+f_1(t_1,y_1,z_1)h$ $=1.5+f_1(0.25,1.5,1)(0.25)$ $=1.5+(1)(0.25)$ $=1.75$ $y_2=y(0.5)\approx 1.75$	$z_2=z_1+f_2(t_1,y_1,z_1)h$ $=1+f_2(0.25,1.5,1)(0.25)$ $=1+\left(e^{-0.25}-2(1)-1.5\right)(0.25)$ $=1+(-2.7211)(0.25)$ $=0.31970$ $z_2=z(0.5)\approx 0.3197$

$$t=t_2=t_1+h=0.25+0.25=0.50$$

Przykład c.d.

Krok 3: $i = 2,\ t_2 = 0.5,\ y_2 = 1.75,\ z_2 = 0.31970$

$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$	$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$
$y_3 = y_2 + f_1(t_2, y_2, z_2)h$ $= 1.75 + f_1(0.50, 1.75, 0.31970)(0.25)$ $= 1.75 + (0.31970)(0.25)$ $= 1.8299$ $y_3 = y(0.75) \approx 1.8299$	$z_3 = z_2 + f_2(t_2, y_2, z_2)h$ $= 0.31972 + f_2(0.50, 1.75, 0.31970)(0.25)$ $= 0.31972 + \left(e^{-0.50} - 2(0.31970) - 1.75\right)(0.25)$ $= 0.31972 + (-1.7829)(0.25)$ $= -0.1260$ $z_3 = z(0.75) \approx -0.12601$

$$t = t_3 = t_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$$

Przykład c.d.

Otrzymane rozwiązanie to:

$$y(0.75) \approx y_3 = 1.8299$$

Wartość dokładna to:

$$y(0.75)\big|_{exact} = 1.668$$

Błąd względny otrzymanego rozwiązania wynosi:

$$|\in_t| = \left|\frac{1.668 - 1.8299}{1.668}\right| \times 100$$